ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2022

ΜΑΘΗΜΑ

Μαθηματικά (Άλγεβρα)

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

12:00

φροντιστήρια πουκαμισάς
Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:	*4/6/2022*
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 28

Α.2. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 87

Α.3. α. Λ β. Σ γ. Λ

Α.4. α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$ β. $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $$\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} x_i \overset{\nu=5}{=} \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$R = t_{\max} - t_{\min} = 25-5 = 20$$

Β.2. $$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(t_i-\bar{x}\right)^2 \overset{\nu=5}{=} \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2 = \frac{\left(25-15\right)^2+\left(10-15\right)^2+\left(5-15\right)^2+\left(20-15\right)^2+\left(15-15\right)^2}{5} =$$

$$= \frac{10^2+\left(-5\right)^2+\left(-10\right)^2+5^2+0^2}{5} = \frac{100+25+100+25+0}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

Β.3. $$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$CV = \frac{s}{\left|\bar{x}\right|} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{10}$$

καθώς $\dfrac{\sqrt{2}}{3} > \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 > \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{9} > \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 200 > 9$ που ισχύει

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x)=x^3-9x^2+\alpha x+1$ όπου $x,\alpha\in\mathbb{R}$

$f'(x)=\left(x^3-9x^2+\alpha x+1\right)'=3x^2-18x+\alpha$

Γ.1. Για $x=1$ έχουμε: $f'(1)=3\cdot 1^2-18\cdot 1+\alpha=3-18+\alpha=\alpha-15$

Όμως από εκφώνηση $f'(1)=0$ άρα $\alpha-15=0\Leftrightarrow\alpha=15$

Άρα $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$ με $x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=3x^2-18x+15$ με $x\in\mathbb{R}$

Γ.2. Έστω $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathrm{M}(2,f(2))$

$f(2)=2^3-9\cdot 2^2+15\cdot 2+1=8-9\cdot 4+30+1=3$

Άρα το σημείο επαφής είναι το $\mathrm{M}(2,3)$

$\lambda=f'(2)=3\cdot 2^2-18\cdot 2+15=12-36+15=-9$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται: $\varepsilon: y=-9x+\beta$

Το σημείο $\mathrm{M}(2,3)$ είναι σημείο της εφαπτομένης, άρα οι συντεταγμένες του, επαληθεύουν την εξίσωση της ε.

Για $x=2,\ y=3$ έχουμε: $3=-9\cdot 2+\beta\Leftrightarrow 3=-18+\beta\Leftrightarrow\beta=21$

Άρα $\varepsilon: y=-9x+21$

Γ.3. $f'(x)=3x^2-18x+15=3\left(x^2-6x+5\right)\quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3\left(x^2-6x+5\right)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16>0$

$$x_1,x_2=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}\left\langle\begin{array}{l} x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5\\ x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1\end{array}\right.$$

$f'(x)>0\Leftrightarrow 3\left(x^2-6x+5\right)>0\Leftrightarrow x^2-6x+5>0\Rightarrow x<1$ ή $x>5$

$f'(x)<0\Leftrightarrow 3\left(x^2-6x+5\right)<0\Leftrightarrow x^2-6x+5<0\Rightarrow 1<x<5$

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗	Τ.Μ. $(1,8)$	↘	Τ.Ε. $(5,-24)$	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[5,+\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=8$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=5$ το $f(5)=-24$

Γ.4. $$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-5)}{x+1}=\frac{3\cdot(1-5)}{1+1}=\frac{3\cdot(-4)}{2}=-\frac{12}{2}=-6$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

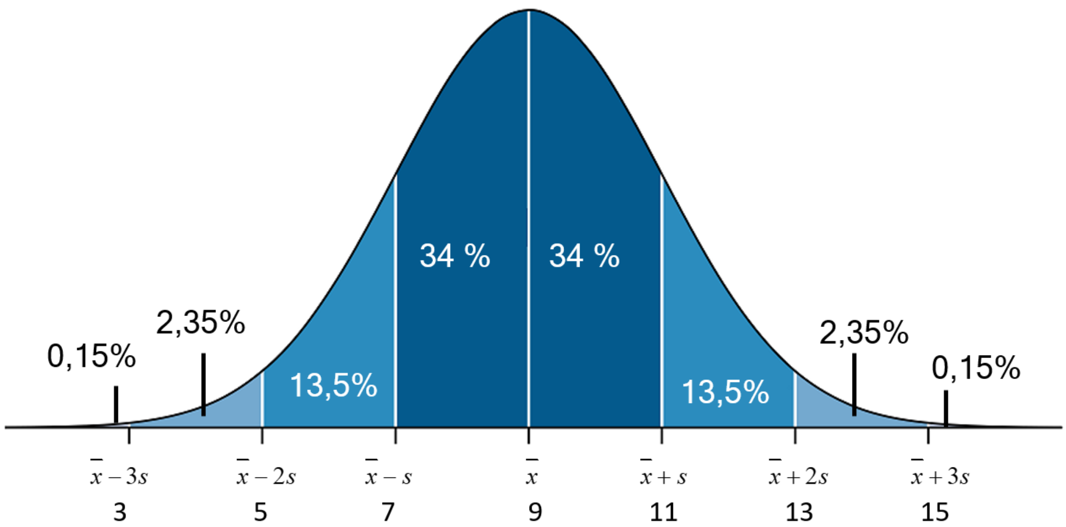
Δ.1. Για να ορίζεται η f πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$ με $x\neq -1$

Δ.2. $f'(2)=\dfrac{1}{(2+1)^2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$ και $f'(1)=\dfrac{1}{(1+1)^2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$

$\bar{x}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{\frac{1}{9}}=9$ και $s=\dfrac{1}{2f'(1)}=\dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

Δ.3.



Από 5 έως 11 λεπτά ανήκει στο διάστημα $\left[\bar{x}-2s, \bar{x}+s\right]$ άρα το ποσοστό είναι

$13,5\% + 34\% + 34\% = 81,5\%$

$\frac{81,5\%}{100} \cdot 2000 = 1630$

Άρα 1630 μαθητές έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά

Πάνω από 15 λεπτά το ποσοστό είναι $0,15\%$

Άρα $\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3$

Οπότε 3 μαθητές έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά

Δ.4. Αν y ο νέος χρόνος επιστροφής των μαθητών, τότε θα ισχύει $y_i = x_i + 3$.

Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, η καινούρια μέση τιμή είναι $\bar{y} = \bar{x} + c$ όπου $c = 3$ άρα $\bar{y} = 9 + 3 = 12$ και η καινούρια τυπική απόκλιση $s_y = s_x = 2$.